TD n°8: Espaces de fonctions holomorphes

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

Séries de Dirichlet et transformée de Mellin.

Exercice 1. Les séries de Dirichlet comme transformées de Mellin.
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes, on suppose que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$$

converge absolument pour $\Re(s) > \sigma_a$. On définit $A(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n$.

1. On majore brutalement
$$\left|\sum_{n\leqslant x} a_n\right| \leqslant \sum_{n\leqslant x} |a_n| \leqslant x^\sigma \sum_{n\leqslant x} \frac{|a_n|}{n^\sigma}.$$
On pose $C_\sigma = \frac{|a_n|}{n^\sigma}$ et on a gagné.
Le caractère $L^1 \cap L^2$ au voisinage de 0 est clair car $A(x) = 0$ pour $x < 1$. Le caractère L^2 à l'infini est clair car $|A(x)x^{-s-1}|^2 \leqslant C_\sigma^2 x^{-2}$ avec $\sigma = \Re(s)$. Pour le caractère L^1, on choisit $\sigma_a < \sigma' < \sigma = \Re(s)$, on a
$$|A(x)x^{-s-1}| \leqslant C_{\sigma'} x^{\sigma'-\sigma-1}$$
et comme $\sigma' - \sigma < 0$, la fonction est intégrable.

2. En remarquant que $A(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n \mathbf{1}_{x\geqslant n}$, on peut réécrire
$$s\int_0^\infty A(x)x^{-s}\frac{dx}{x} = \sum_{n\geqslant 1} s\int_n^\infty a_n x^{-s}\frac{dx}{x} = -\sum_{n\geqslant 1}\left[\frac{a_n}{x^s}\right]_n^\infty = \sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}.$$

Exercice 2. Abscisse de convergence absolue.
On rappelle à toutes fins utiles le théorème de sommation par parties : si $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sont des suites de nombres complexes, alors

$$\sum_{n=1}^N A_n b_{n+1} = A_{N+1}B_{N+1} - A_1 B_1 - \sum_{n=1}^N a_{n+1}B_{n+1}$$

où $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Dans tout l'exercice, on considère une série de Dirichlet formelle $f(s) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$. On note $f'(s) = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{\log(n)a_n}{n^s}$ sa dérivée formelle.

1. Sur tout demi-plan de la forme $\Re(s) > \sigma$, avec $\sigma > \sigma_a(f)$, la série de Dirichlet converge normalement et donc uniformément, donc sa limite est uniforme.

2. Si $\sum \frac{a_n}{n^s}$ et $\sum \frac{b_n}{n^s}$ convergent absolument, leur somme converge également absolument. La même propriété est vraie pour le produit :
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{n^\sigma}\cdot\sum_{n\geqslant 1}\frac{|b_n|}{n^\sigma} = \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{d|n}|a_d b_{n/d}|\right)\frac{1}{n^\sigma}$$
et cette deuxième somme à termes positifs converge donc. Comme $\left|\sum_{d|n} a_d b_{n/d}\right| \leqslant \sum_{d|n}|a_d b_{n/d}|$, on trouve bien que la série produit converge uniformément (et elle converge nécessairement vers le produit).
Reste à voir la dérivée, mais si $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{n^\sigma}$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|\log(n)}{n^{\sigma+\varepsilon}}$ converge pour tout $\varepsilon > 0$ puisque $\log(n)$ est dominé par n^ε. Ceci conclut.

3. On remarque que $\sigma_a(f) \geqslant 0$ nécessairement si $C_n \to \infty$. On utilise la formule de sommation par parties pour écrire
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{n^\sigma} = \frac{C_N}{(N+1)^\sigma} + \sum_{n=1}^{N} C_n \left(\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma} \right)$$
Supposons $\sigma > \limsup \frac{\log(C_n)}{\log(n)}$. Alors, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $\sigma - \varepsilon > \limsup \frac{\log(C_n)}{\log(n)}$, et donc pour tout n, on a
$$C_n \leqslant n^{\sigma-\varepsilon}.$$
Il suffit alors de vérifier que la série
$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\varepsilon} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^\sigma \right)$$
converge. Comme $1 - (1-1/n)^\sigma \sim \frac{\sigma}{n}$, la série ci-dessus, à termes positifs, a un terme général de l'ordre de $n^{-1-\varepsilon}$, et elle est donc convergente.
Il en découle que $\sigma_a(f) \leqslant \limsup \frac{\log(C_n)}{\log(n)}$. On va maintenant montrer que si $\limsup \frac{\log(C_n)}{\log(n)} > 0$, alors $\sigma_a(f) \geqslant \limsup \frac{\log(C_n)}{\log(n)}$.
Si $0 < \sigma < \limsup \frac{\log(C_n)}{\log(n)}$, alors pour ε assez petit il existe une infinité de n tels que $n^{\sigma+\varepsilon} < C_n$, et en particulier $\limsup \frac{C_n}{(n+1)^\sigma} = \infty$. Grâce à la sommation par parties, on a
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \geqslant \frac{C_N}{(N+1)^\sigma}.$$
Il en découle que $\limsup_N \sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{n^\sigma} = \infty$, et donc nécessairement $\sigma_a(f) \geqslant \limsup \frac{\log(C_n)}{\log(n)}$.
En mettant les deux inégalités ensemble, on trouve que si $\limsup \frac{\log(C_n)}{\log(n)} > 0$ alors $\sigma_a(f) = \limsup \frac{\log(C_n)}{\log(n)}$.
Mais si $\limsup \frac{\log(C_n)}{\log(n)} = 0$, l'égalité découle du fait que $\sigma_a(f) \geqslant 0$ et de la première inégalité, prouvée sans condition sur σ_a.

4. On peut mettre au travail la définition au-dessus : on a $C_n = n$, donc $\sigma_a(f) = \limsup \frac{\log(n)}{\log(n)} = 1$.
On va maintenant montrer que la série converge uniformément sur le compact $\Re(s) \geqslant \delta$, $|s| \leqslant R$ pour tout $R, \delta > 0$. Pour ce faire, on réécrit
$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^s} = -\sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{1}{(2k+1)^s} - \frac{1}{(2k+2)^s} \right)$$
et donc
$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^s} \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \left| \frac{1}{(2k+1)^s} - \frac{1}{(2k+2)^s} \right| = \sum_{k \geqslant 1} \frac{\left| \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^s - 1 \right|}{(2k+2)^\sigma}.$$
On a l'équivalent $\left| \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^s - 1 \right| \sim \frac{|s|}{2k+1}$. On peut donc borner
$$\left| \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^s - 1 \right| \leqslant 2 \frac{R}{(2k+1)(2k+2)^\delta}$$
pour k assez grand et en conclure que la série converge normalement sur le compact annoncé, ce qui conclut.

Exercice 3. Autour de la transformée de Mellin

On définit, pour f fonction mesurable de $\mathbb{R}_{>0}$ dans $\mathbb{C}$:
$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}$$
pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge absolument.

1. $|x^{s-1}f(x)| = x^{\Re(s)-1}|f(x)|$ donc la convergence est indépendante de $\Im(s)$.

2. Démontrer que si $\mathcal{M}f(s)$ converge absolument, alors $\mathcal{M}f(s')$ converge également pour $\Re(s) = \Re(s')$. En déduire que $\mathcal{M}f$ définit une fonction sur une bande (potentiellement vide) $a < \Re(s) < b$.

3. Démontrer $\mathcal{M}f$ est holomorphe sur cette bande bande.

4. On fait un changement de variable $y = \log(x)$, on a $dy = \frac{dx}{x}$. On trouve donc

$$\mathcal{M}f(\sigma + it) = \int_{\mathbb{R}} e^{sy} f(e^y)dy = \int_{\mathbb{R}} e^{ity} e^{\sigma y} f(e^y)dy.$$

5. On applique la formule d'inversion de Fourier L^1 à $\sigma \in]a, b[$ fixé :

$$e^{-\sigma y} f(e^{-y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iyt} \mathcal{M}f(\sigma + it)dt.$$

En posant $x = e^{-y}$, on trouve

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} x^{-\sigma - it} \mathcal{M}f(\sigma + it)dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma + i\mathbb{R}} x^{-s} \mathcal{M}f(s)ds.$$

On suppose à présent que f est C^∞ à décroissance rapide et continue en l'infini, c'est-à-dire que $x^n f(x)$ est bornée pour tout n. On suppose que les dérivées de f vérifient la même condition, et que f et ses dérivées sont bornées au voisinage de 0.

6. (a) Au voisinage de l'infini, $f(x)x^{s-1}$ est intégrable peu importe s. La seule condition d'intégrabilité restrictive ici est la condition au voisinage de 0 : il faut donc que $\Re(s) > 0$.

   (b) On fait une intégration par parties

$$\int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x} = -\frac{1}{s} \int_0^\infty x^{s+1} f'(x) \frac{dx}{x}$$

   (c) On obtient par récurrence

$$\mathcal{M}f(s) = \frac{(-1)^n}{s(s+1)...(s+n-1)} \mathcal{M}\left(f^{(n)}\right)(s+n)$$

   et on peut donc étendre $\mathcal{M}f$ à $\Re(s) > -n$ par cette formule, avec des pôles aux entiers négatifs. Le résidu de $\mathcal{M}f$ en $-n$ est donné par

$$\lim_{s \to -n} (s+n)\mathcal{M}f(s) = \frac{(-1)^{n+1}}{-n(1-n)...(n-1-n)} \mathcal{M}\left(f^{(n+1)}\right)(1).$$

   On vérifie que le terme devant se simplifie en $-\frac{1}{n!}$, et on calcule

$$\mathcal{M}(f^{(n+1)}) = \int_0^\infty f^{(n+1)}(x)dx = -f^{(n)}(0)$$

   ce qui conclut.

Elements d'analyse fonctionnelle.

Exercice 4. Une application du théorème de Montel.
Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in]a, b[$ et y_n une suite de réels tendant vers $+\infty$ tel que $|f(x + iy_n)| > \delta$ pour tout $n \geq 0$. Notons $g_n \in \mathcal{O}(U)$ la fonction définie par $g_n(z) = f(z + iy_n)$. Par le théorème de Montel, la famille $(g_n)_n$ est normale et on peut trouver une extraction $\phi(n) \to +\infty$ tel que $g_{\phi(n)}$ converge vers une fonction $g \in \mathcal{O}(U)$. Par l'hypothèse sur f, on doit avoir $g(c + iy) = 0$ pour tout $y > 0$, donc g s'annule sur un ensemble possédant un point d'accumulation et on a donc $g = 0$. Or on doit avoir $|g(x)| > \delta$, on aboutit à une contradiction (il y a une petite difficulté lié au fait que g n'est pas vraiment holomorphe sur l'intervalle réel $]a, b[$ mais l'argument est facilement adaptable).

Exercice 5. Limite simple de fonctions holomorphes.

1. Fixons V un ouvert tel que $\overline{V} \subset U$. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$S_k = \{z \in \overline{V},\ |f_j(z)| \leq k,\ \forall j \in \mathbb{N}^*\}.$$

   En utilisant la continuité des f_j on montre que S_k est fermé dans $\mathbb{C}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \bar{V}$, comme $(f_j(z))_j$ converge pour tout $z \in U$, on a $z \in S_k$ pour un certain $k > 0$. Il suit que: $\overline{V} = \bigcup_k S_k$. Par la contraposée du théorème de Baire, l'un des S_k doit être d'intérieur non vide. Le résultat de la question suit.

2. Par le théorème de Montel, sur chaque ouvert où la famille $(f_k)_k$ est uniformément bornée, on a f qui est holomorphe. Pour tout $z \in U$ et $\rho > 0$, on peut trouver par la question précédente un petit ouvert $V_{z,\rho} \subset D(z, \rho)$ tel que la famille $(f_k)_k$ est uniformément bornée sur $V_{z,\rho}$, donc f y est holomorphe. L'union de tous les $V_{z,\rho}$ fournit l'ouvert recherché.

Exercice 6. Une suite bien connue.
On va utiliser le théorème de Montel pour montrer la convergence. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $A = \sup_{z \in K} |z|$. Pour $z \in K$, $n \geqslant 1$ un entier, on a

$$|f_n(z)| \leqslant \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n$$

la dernière suite étant convergente dans $\mathbb{R}$, donc bornée, on en déduit que $\mathcal{F} = \{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est une partie bornée. Considérons $(g_n)_n$ une sous-suite convergente de $\mathcal{F}$ et notons g sa limite. On en déduit que $g(0) = 1$ et comme

$$g_n'(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{n}} g_n(z),$$

on en déduit à la limite que $g' = g$. Ainsi $z \mapsto e^{-z} g(z)$ est de dérivée nulle sur le connexe $\mathbb{C}$ elle est constante et donc $g(z) = e^z$. On a montré que $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{g\}$ et $g \notin \mathcal{H}$ puisque ce n'est pas un polynôme. Par le théorème de Montel, $\overline{\mathcal{F}}$ est compact dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ et on a montré que g était la seule valeur d'adhérence de $\mathcal{F}$. Ainsi on a montré que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact vers $z \mapsto e^z$.

Exercice 7. Une partie compacte de $\mathcal{O}(U)$.

1. C'est une application directe du théorème de Montel. Si $f \in \mathcal{F}_a$, alors $\frac{1}{n} f \to 0$ donc $0 \in \overline{\mathcal{F}}_a$

2. Quitte à remplacer f par $f - f(z_0)$, il suffit de démontrer que f ne s'annule qu'une fois au plus. Supposons f non-constante, alors f_n est non-constante pour n assez grand.
   On peut alors se ramener au théorème de Hurewicz (cf TD6, exercice 8 et la correction) qui prouve qu'un zéro de f est une limite de zéros des f_n. En particulier, comme f_n n'a qu'un zéro au plus, f n'a qu'un zéro au plus.

3. Les conditions $f(a) = 0$ et $\sup_z |f(z)| \leqslant 1$ sont clairement des conditions fermées. La question 2 ci-dessus démontre que f injective ou constante est une condition fermée, et comme $f(a) = 0$, cette condition se ramène à f injective ou nulle, ainsi, $\mathcal{F}_a \cup \{0\}$ est fermé et est donc l'adhérence de $\mathcal{F}_a$.

Exercice 8. L'algèbre du disque et sa boule unité.
On note $A(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions continues sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ qui sont holomorphes sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$.

1. Si $(f_n)_n \in A(\mathbb{D})$, et $f_n \to f \in C^0(\overline{\mathbb{D}})$ uniformément, en particulier $f_n \to f$ uniformément sur sur (tout compact de) $\mathbb{D}$ et f est donc holomorphe sur $\mathbb{D}$.

2. On peut par exemple considérer

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$$

   qui appartient clairement à $A(\mathbb{D})$ vu que la série converge absolument en tout point du disque. La dérivée de $\mathrm{Li}_2(z)$ est $\frac{-\log(1-z)}{z}$, qui n'est pas bornée au voisinage de 1 et ne peut donc pas se prolonger en une fonction continue sur le cercle.

3. Soit $f \in A(\mathbb{D})$, on veut montrer qu'il existe un polynôme à distance $< \varepsilon$ de f. On commence par choisir $r < 1$ tel que $|f(rz) - f(z)|_\infty < \varepsilon/2$, qui existe car $r \mapsto |f(rz) - f(z)|_\infty$ est continue par uniforme continuité de f sur $\mathbb{D}$. Ensuite, comme f est somme d'une série entière de rayon de convergence 1, on constante que $f(rz)$ est définie par une série entière qui converge absolument sur tout compact de $\mathbb{D}(0, 1/r)$, en particulier sur $\mathbb{D}$. On obtient donc un polynôme (une somme partielle de cette fonction d'assez haut degré) vérifiant $|f(rz) - P(z)|_\infty < \varepsilon/2$. On a donc

$$|f(z) - P(z)| \leqslant |f(z) - f(rz)| + |f(rz) - P(z)| < \varepsilon.$$

On introduit, pour $|a| < 1$, le facteur de Blaschke

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

4. Si $|z| = 1$ alors on a

$$|z - a| = |z| \cdot |1 - a\overline{z}| = |1 - \overline{a}z|.$$

Par le principe du maximum, et comme φ_a est non-constante, on a $|\varphi_a(z)| < 1$ si $|z| < 1$.

5. Commençons par prouver l'indication : si $g \in A(\mathbb{D})$ est unimodulaire et sans zéros, alors $1/g \in A(\mathbb{D})$. Par le principe du maximum, on a $|1/g| \leqslant 1$ et $|g| \leqslant 1$ donc g est constante de module 1.
Soit à présent $f \in A(\mathbb{D})$ unimodulaire. Comme elle est uniformément continue, il existe $r < 1$ telle que $|z| \geqslant r \implies |f(z)| \geqslant \frac{1}{2}$. Il en découle, par le principe des zéros isolés, que f a un nombre fini de zéros, disons $a_1, ..., a_m$ (comptés avec multiplicité). La fonction $\varphi(z) = \prod_{j=1}^m \varphi_{a_j}(z)$ est également unimodulaire et f/φ est donc unimodulaire et sans zéros, donc constante, ce qui conclut.

6. C'est une application de la formule de Cauchy à la fonction $w \mapsto \frac{wz^d + f(z)}{1+f^*(z)w}$.

7. Le résultat précédent démontre que f est intégrale d'unimodulaires - en effet,

$$f_t : z \mapsto \frac{e^{it}z^d + f(z)}{1 + f^*(z)e^{it}}$$

est unimodulaire car pour $|z| = 1$ on a $f^*(z) = z^d\overline{f(z)}$, et donc

$$|e^{it}z^d + f(z)| = |z|^d|e^{it} + \overline{z}^d f(z)| = \left|1 + z^d\overline{f(z)}e^{it}\right|.$$

On a donc écrit f comme une intégrale d'unimodulaires. Vu que $t \mapsto f_t$ est continue uniformément en z, les sommes de Riemann correspondant à l'intégrale convergent uniformément vers f. Ces sommes de Riemann sont des combinaisons convexes d'unimodulaires, et donc tout polynôme f de norme < 1 appartient à l'enveloppe convexe fermée des unimodulaires. Comme l'ensemble des polynômes de norme < 1 est dense dans la boule unité, on peut conclure.

Exercice 9. Le dual de l'algèbre du disque

1. Par le principe du maximum, $\sup_{z\in\mathbb{T}} |f(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$, et si f est nulle sur le cercle unité alors f est nulle sur $\mathbb{D}$.
On admet (ou rappelle) le théorème de Riesz-Markov-Kakutani : toute fonctionnelle linéaire continue sur $C(X, \mathbb{C})$ est donné par l'intégration contre une mesure borélienne régulière à valeurs complexes.

2. On applique le théorème de Hahn-Banach en considérant $A(\mathbb{D})$ comme un sous-espace fermé de $A(\mathbb{D})$: toute fonctionnelle sur $A(\mathbb{D})$ s'étend à $C(\mathbb{T})$, et s'écrit donc comme la restriction à $A(\mathbb{D})$ de

$$f \mapsto \int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu(z).$$

μ n'est cependant pas unique : pour tout $f \in A(\mathbb{D})$, si on prend $d\mu(z) = \frac{dz}{z}$, on trouve $\int_{\mathbb{T}} f(z)d\mu(z) = 0$ pour tout f.

3. Soit $K \subseteq \mathbb{D}$ un compact, ν une mesure de Radon complexe sur ce compact, $m \geqslant 0$ un entier.

(a) On applique le théorème de Cauchy :

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}} dw.$$

Tout compact $K \subseteq \mathbb{D}$ est inclus dans $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ pour un $r < 1$, et on a donc

$$\sup_K |f^{(m)}| \leqslant m! \sup_{\mathbb{T}} |f| \cdot \frac{1}{1-r}.$$

Ainsi,

$$\left(\int_K f^{(m)}(z) d\nu(z)\right) \leqslant |\nu|(K) \sup_K |f^{(m)}| \leqslant |\nu|(K) m! \sup_{\mathbb{T}} |f| \cdot \frac{1}{1-r}$$

où $|\nu|$ est la mesure positive finie associée à la mesure complexe ν (voir note après l'exercice).

(b) On peut utiliser Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \int_K f^{(m)}(z) d\nu(z) &= \int_K \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}} dw d\nu(z) \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(w) \left(\int_K \frac{1}{(w-z)^{m+1}} d\nu(z)\right) dw \end{aligned}$$

donc μ est une mesure à densité vérifiant $d\mu(w) = \left(\int_K \frac{1}{(w-z)^{m+1}} d\nu(z)\right) dw$

Exercice 10. Propriété universelle de l'algèbre du disque

Un $\mathbb{C}$-espace de Banach $(B, |.|_B)$ est appelé $\mathbb{C}$-algèbre de Banach, ou juste algèbre de Banach, si B est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre associative unitaire (mais pas nécessairement commutative) pour laquelle la norme est sous-multiplicative, c'est-à-dire que $|bb'|_B \leqslant |b|_B |b'|_B$.

1. On omet le B en indice pour la norme. Si $b_n \to b$, $b'_n \to b'$, alors

$$\begin{aligned} |bb' - b_n b'_n| &= |bb' - b_n b' + b_n b' - b_n b'_n| \\ &\leqslant |bb' - b_n b'| + |b_n b' - b_n b'_n| \\ &\leqslant |b - b_n| \cdot |b'| + |b_n| \cdot |b'_n - b'|. \end{aligned}$$

En prenant $n \to \infty$, on a convergence vers 0.

2. La norme sup $|.|_{\infty, X}$ vérifie l'inégalité voulue car $\sup_{x \in X} |f(x)g(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)| \sup_{x \in X} |g(x)|$. Comme $A(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre fermée de $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$, elle est complète et c'est une algèbre de Banach.
On dit qu'un élément $b \in B$ est polynomialement borné s'il existe $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{C}[z]$, on a
$$|P(b)| \leqslant C|P|_\infty.$$
On note $\mathrm{PB}(B)$ l'ensemble des éléments polynomialement bornés de B.

3. Comme φ est continue, elle est entièrement déterminée par son image sur le sous-espace dense $\mathbb{C}[z]$, et comme c'est un morphisme d'algèbres, elle est entièrement déterminée par le générateur z.
Reste à voir que $\varphi(z)$ est polynomialement bornée. L'application φ, comme morphisme d'algèbres continu, est aussi une application linéaire continue, qui vérifie donc que
$$|P(\varphi(z))|_B = |\varphi(P(z))|_B \leqslant ||\varphi|| \cdot |P(z)|_\infty = ||\varphi||.$$
L'application réciproque se définit en partant de $b \mapsto (\varphi_b : b \mapsto P(b))$ pour $P \in \mathbb{C}[z]$. Comme b est polynomialement bornée, φ_b est uniformément continue sur $\mathbb{C}[z]$ et s'étend donc en une application linéaire sur $A(\mathbb{D})$ par $\varphi_b(f) = \lim_n P_n(b)$ pour n'importe quelle suite P_n qui converge vers f. Comme la multiplication est continue, et que si $P_n \to f$, $Q_n \to g$ uniformément alors $P_n Q_n \to fg$, on a bien $\varphi_b(fg) = \lim_n \varphi_b(P_n)\varphi_b(Q_n) = \lim_n \varphi_b(P_n) \lim_n \varphi_b(Q_n) = \varphi_b(f)\varphi_b(g)$, et φ est bien un morphisme d'algèbres.
La continuité de $\varphi \mapsto \varphi(z)$ découle directement de la continuité de $\varphi \mapsto \varphi(f)$ pour tout f par définition de la topologie de convergence simple.

4. PB(B) est la boule unité fermée de B : en effet, si $|f|_\infty > 1$, alors il existe $x \in X$ tel que $|f(x)| > 1$ et donc la suite $(f^n)_n$ n'est pas bornée Réciproquement, si $|f|_\infty \leqslant 1$ alors f est à valeurs dans le disque unité fermé et clairement $|P(f)|_\infty \leqslant \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |P(z)|$.
Pour la continuité de la réciproque, il faut démontrer que $g \mapsto \varphi_g$ est continue. On remarque que $\varphi_g(f) = f \circ g$. Par définition de la topologie de convergence simple, l suffit de prouver que pour tout f, la composition $g \mapsto \varphi_g \mapsto \varphi_g(f) = f \circ g$ est continue, ce qui est clair car $|f \circ g|_\infty \leqslant |f|_\infty$.

5. Notons η la classe de z, il vérifie $\eta^2 = 0$. On vérifie que c'est bien une algèbre de Banach :

$$|(a + b\eta)(c + d\eta)| = |ac + bc\eta + ad\eta| \leqslant |ac| + |bc| + |ad|.$$

On vérifie alors que $(|a| + |b|)(|c| + |d|) = |ac| + |bc| + |ad| + |bd| \geqslant |(a + b\eta)(c + d\eta)|$. On calcule, pour P polynôme, que $P(a + b\eta) = P(a) + bP'(a)\eta$. Ainsi, $a + b\eta$ est borné polynomialement si $|a| < 1$ ou si $b = 0$ et $|a| \leqslant 1$. Le deuxième cas se passe d'explications, pour le premier on remarque que par la formule de Cauchy on a

$$|P'(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi(1 - |a|)} \sup_{|z|=1} |P(z)|.$$

Ainsi, $\varphi_{a+b\eta}(f) = f(a) + bf'(a)\eta$.
En prenant $f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$, on a

$$f(a + b\eta) = f(a) - b\frac{\log(1 - a)}{a}\eta.$$

Si on prend $a_n = 1 - 1/n, b_n = \frac{1}{\log\log(n)}$, clairement $a_n + b_n\eta \to 1(+0\eta)$. Cependant,

$$f(a_n + b_n\eta) = f(a_n) - \frac{1}{\log\log n}\frac{\log(n)}{1 - 1/n}\eta$$

qui diverge quand $n \to \infty$.